Лекция 7. Метод аналогий. Применение аналогий при построении моделей

Одним из плодотворных подходов построения моделей является использование аналогий с уже изученными явлениями.

В особенности это важно для **трудноформализуемых объектов**, когда при попытке построить модель какого-либо объекта либо невозможно прямо указать фундаментальные законы или вариационные принципы, которым он подчиняется.

К таким объектам относятся объекты из биологии, экономики, государственного права и др.

Например, что, казалось бы, общего между радиоактивным распадом и динамикой популяций, в частности изменением численности населения нашей планеты

Однако на простейшем уровне такая аналогия вполне просматривается, о чем свидетельствует одна из простейших моделей популяций, называемая **моделью Мальтуса**.

В основе этой модели лежит простое утверждение **– скорость изменения населения со временем *t* пропорциональна его текущей численности** $N(t)$**,** умноженной на сумму коэффициентов рождаемости $\alpha(t) \geq 0$ и смертности $\beta(t) \leq 0$:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left[\alpha(t) - \beta(t)\right] N(t) \tag{1}$$

Уравнение (1) похоже на уравнение радиоактивного распада и совпадает с ним при $\alpha < \beta$ (если α и β постоянные), т.е.

$$\frac{dN(t)}{dt} = -kN(t)$$ – закон радиоактивного распада.

Это не удивительно, так как при выводе их использовались одни и те же соображения.

Решение (1) имеет вид:

$$N(t) = N(0)\exp\int_0^t [\alpha(t) - \beta(t)]dt \qquad (2)$$

где $N(0) = N(t = t_0)$ – начальная численность.

Для простого случая, когда α, $\beta - const$, равновесие между рождаемостью и смертностью ($\alpha = \beta$) неустойчиво.

Имеется ввиду, что даже небольшое нарушение равенства $\alpha = \beta$ приводит с течением времени отклонению от $N(0)$ (Рис. 1):

То есть:

а) при $\alpha < \beta$ и $t \to \infty$ $N(t) \to 0$ вырождаемость населения;

б) при $\alpha > \beta$ и $t \to \infty$ $N(t) \to \infty$ перенаселение;

Последнее послужило основанием для опасений Мальтуса о грядущем перенаселении Земли с вытекающими отсюда последствиями.

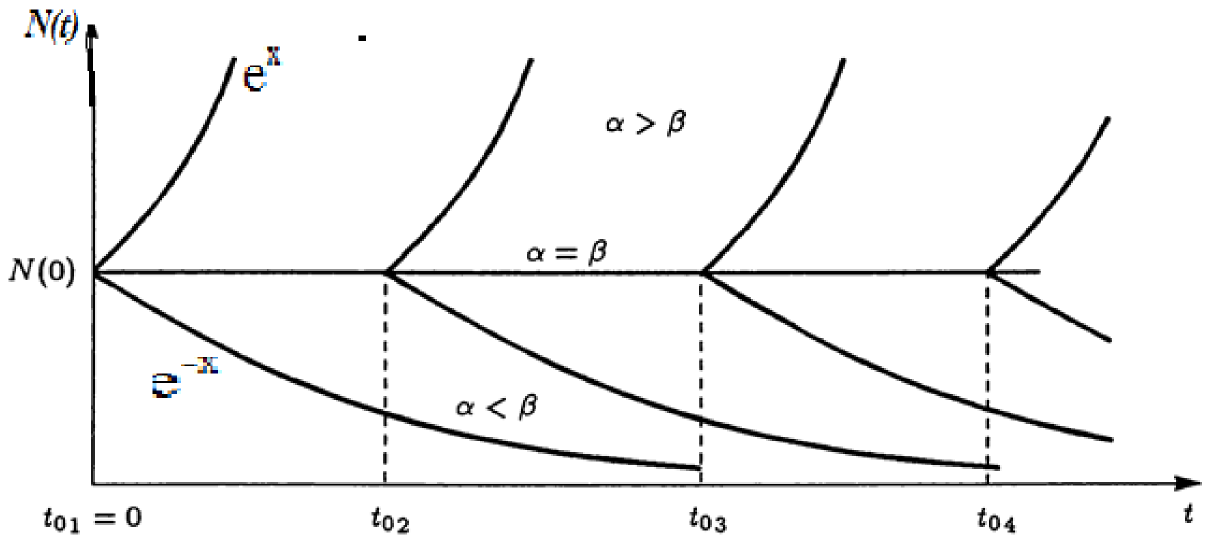

Рисунок 1 –Изменение численности популяции со временем в модели Мальтуса

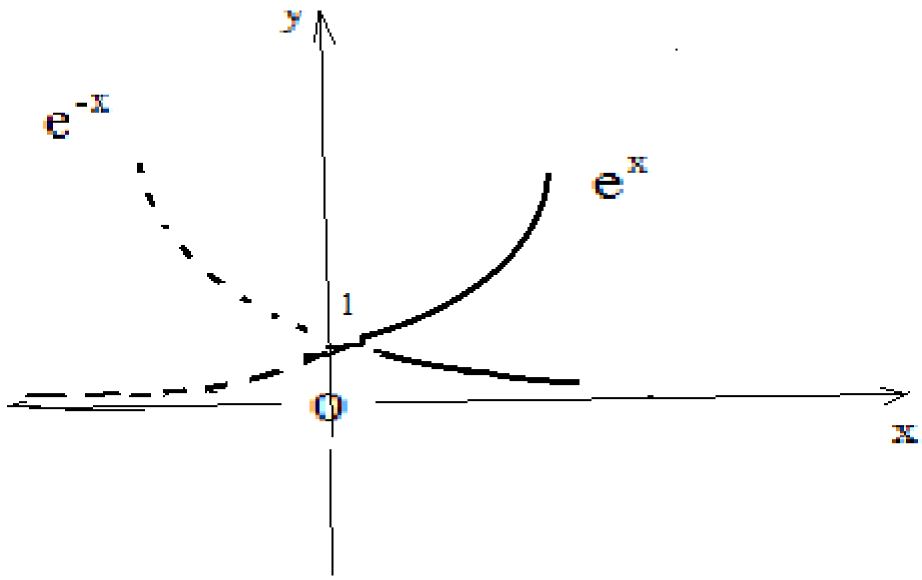

Рисунок 2. График эспоненциальной функции.

Как и любая модель вышеуказанная модель имеет свои ограничения.

Конечно сложнейший процесс изменения численности населения, зависящий к тому же от сознательного вмешательства самих людей (т.е. помимо объективных факторов, есть еще и субъективные, что очень сложно) не может описываться каким-то простым законом.

Но сделанное замечание нисколько не умоляет роли аналогии в построении математических моделей очень сложных явлений.

Применение аналогий основано на одной из важнейших свойств моделей – их универсальности, т.е. их применяемости к объектам принципиально различной природы. Примером тому является процессы колебаний в объектах различной природы. Покажем, что, несмотря на разную сущность объектов, им соответствуют одни и те же математические модели.

Далее рассмотрим аналогии между механическими, физическими, биологическими и экономическими процессами.

Пример 2. Колебательный электрический контур

Это устройство представляет собой конденсатор, соединенный проводниками с индуктивной катушкой (Рис. 3).

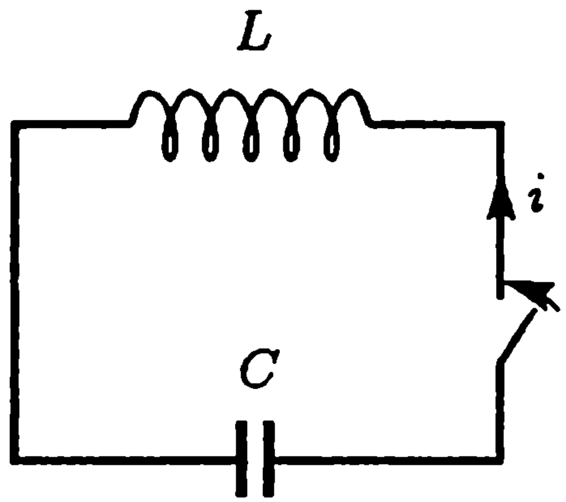

Рисунок 3 –Колебательный электрический контур

В момент t = 0 цепь замыкается и заряд с конденсатора начинает распространения по цепи.

Пусть C - емкость конденсатора,

L - индуктивность катушки,

$q(t)$ - заряд на обкладках конденсатора.

Сопротивление проводов будем считать равным нулю.

Очевидно, что сила тока $i(t)$ и напряжение $v(t)$ также являются функциями времени.

По физическому смыслу величины C в любой момент времени имеем равенство:

$$v(t) = q(t)C. \tag{3}$$

При переменном токе в катушке возникает электродвижущая сила самоиндукции ε, равная

$$\varepsilon = -L\frac{di}{dt}, \qquad (4)$$

Также, используя закон Ома для цепи в отсутствие сопротивления, имеем:

$$v(t) = -\varepsilon(t). \qquad (5)$$

Из (3) –(5) получим следующее выражение

$$q(t)C = -\varepsilon(t) = L\frac{di}{dt}. \qquad (6)$$

Так как по определению

$$i = -\frac{dq}{dt}, \qquad (7)$$

то из (6) с учетом (7) получаем уравнение

$$L\frac{d^2q}{dt^2} = -Cq, \qquad (8)$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -kq, \qquad где \quad k = \frac{C}{L}, \qquad (9)$$

которое описывает процесс колебаний величины *q(t)* в простейшем электрическом контуре.

Пример 3. Малые колебания при взаимодействии двух биологических популяций

Пусть на одной территории проживает две биологические популяции с численностью *N(t)* и *M(t)*, причем

первая популяция ***N(t)*** **- растительноядная**,

вторая ***M(t)*** **– плотоядная**, т.е. употребляет в пищу представителей первой популяции.

По аналогии с моделью Мальтуса, где прирост популяции пропорционален самой популяции, умноженной на сумму коэффициентов рождаемости $\boldsymbol{\alpha}$ и смертности $\boldsymbol{\beta}$,

скорость изменения популяции ***N(t)*** зависит от скорости прироста благодаря рождаемости и скорости убывания благодаря соседству плотоядной популяции. Естественной смертностью пренебрегаем.

$$\frac{dN}{dt} = \left(\alpha_1 - \beta_1 M\right) N(t). \tag{10}$$

Численность популяции ***M(t)*** растет тем быстрее, чем больше численность первой популяции *N(t)*, а при её отсутствии уменьшается со скоростью, пропорциональной численности *M(t)*.

$$\frac{dM}{dt} = \left(\alpha_2 N - \beta_2\right) M(t). \tag{11}$$

Очевидно, что система этих популяций находится в равновесии, когда $\frac{dM}{dt} = \frac{dN}{dt} = 0$, это выполняется, когда $M_0 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$ и $N_0 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}$.

Рассмотрим малые отклонения системы от равновесного состояния, т.е. представим решения в виде

$$\begin{aligned} N &= N_0 + n(t), \qquad n(t) \ll N_0, \\ M &= M_0 + m(t), \quad m(t) \ll M_0. \end{aligned} \tag{12}$$

Подставляя (12) в (10) и (11) и отбрасывая величины более высокого порядка малости, получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= -\beta_1 N_0 m(t), \\ \frac{dm}{dt} &= \alpha_2 M_0 n(t). \end{aligned} \tag{13}$$

Дифференцируя в (13) первое уравнении и подставляя в него второе, придем к уравнению

$$\frac{d^2 n}{dt^2} = -\alpha_1 \beta_2 n(t), \tag{16}$$

Аналогично находим

$$\frac{d^2 m}{dt^2} = -\alpha_1 \beta_2 m(t), \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 m}{dt^2} = -km(t), \quad \textit{где} \;\; k = \alpha_1 \beta_2 .$$

Оно аналогично (16).